

Random Coefficient Models

Let y_{ijk} be the response at time k from replicate j in the i^{th} group.

Consider the model:

$$y_{ijk} = a_{ij}^* + b_{ij}^* d_k + c_{ij}^* d_k^2 + e_{ijk}$$

where $d_k = \text{time } k$ and

$$\begin{bmatrix} a_{ij}^* \\ b_{ij}^* \\ c_{ij}^* \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ac} & \sigma_{bc} & \sigma_c^2 \end{bmatrix} \right),$$

If we let $a_{ij}^* = \alpha_i + a_{ij}$, $b_{ij}^* = \beta_i + b_{ij}$, $c_{ij}^* = \gamma_i + c_{ij}$,

$$\begin{aligned} y_{ijk} &= [\alpha_i + a_{ij}] + [\beta_i + b_{ij}] d_k + [\gamma_i + c_{ij}] d_k^2 + e_{ijk} \\ &= \underbrace{\alpha_i + \beta_i d_k + \gamma_i d_k^2}_{\text{fixed}} + \underbrace{a_{ij} + b_{ij} d_k + c_{ij} d_k^2}_{\text{random}} + e_{ijk} \end{aligned}$$

where $[a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}]' \sim N(\mathbf{0}, V)$